EEIGM
1ère Année

Discipline Mécanique

Résistance des Matériaux

TD 1 :
Exercices d'application sur la notion de torseur

Zoubir AYADI

Exercice 1

Soit $\left(O;\underline{i},\underline{j},\underline{k}\right)$ un repère orthonormé direct. On note (x, y, z) les coordonnées du point P et on considère le champ de vecteurs H(P) suivant :

$$\underline{H}(P)=\begin{vmatrix}-\omega\left[\left(y-y_0\right)\cos\theta+z\sin\theta\right]\\ \omega\left(x-x_0\right)\cos\theta\\ \omega\left(x-x_0\right)\sin\theta+\dfrac{\upsilon}{\cos\theta}\end{vmatrix}$$ où x_0,y_0,ω,θ et υ sont des constantes.

Question 1 : Montrer que le champ de vecteurs H(P) est équiprojectif. Conclure.

Question 2 : Déterminer les coordonnées vectorielles $\underline{R}(\tau)$ et $\underline{M}(\tau,A)$ au point de réduction A de coordonnées $(x_0,y_0,0)$

Corrigé

1. Vérifier l'équiprojectivité du champ de vecteurs H(P) revient à vérifier la relation suivante :

$$\left[\underline{H}(P_2)-\underline{H}(P_1)\right].\underline{P_1P_2}=0 \quad \forall P_1,\ \forall P_2$$

$$\underline{P_1P_2}=\underline{OP_2}-\underline{OP_1}=\begin{vmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\\ z_2-z_1\end{vmatrix}$$

$$\underline{H}(P_2)-\underline{H}(P_1)=\begin{vmatrix}-\omega\left[\left(y_2-y_1\right)\cos\theta+\left(z_2-z_1\right)\sin\theta\right]\\ \omega\left(x_2-x_1\right)\cos\theta\\ \omega\left(x_2-x_1\right)\sin\theta\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\left[\underline{H}(P_2)-\underline{H}(P_1)\right].\underline{P_1P_2}&=-\omega\left(x_2-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\cos\theta-\omega\left(x_2-x_1\right)\left(z_2-z_1\right)\sin\theta\\&+\omega\left(x_2-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\cos\theta+\omega\left(x_2-x_1\right)\left(z_2-z_1\right)\sin\theta\\&=0\end{aligned}$$

$\left[\underline{H}(P_2)-\underline{H}(P_1)\right].\underline{P_1P_2}=0\Leftrightarrow$ le champ de vecteurs est donc équiprojectif, c'est un torseur, c'est aussi un champ de moment et il est antisymétrique (on a l'équivalence entre les quatre qualificatifs) .

2. Coordonnées vectorielles du torseur

H(P) est un champ de moment : $\exists$R / $\underline{H}(P_2)=\underline{H}(P_1)+\underline{P_2P_1}\wedge\underline{\mathrm{R}}$

$$\underline{H}(P_2)-\underline{H}(P_1)=\underline{P_2P_1}\wedge\underline{\mathrm{R}}$$

La résultante R peut être déterminée directement :

On pose $\underline{R}=\begin{vmatrix}R_1\\ R_2\\ R_3\end{vmatrix}$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} R_2(z_2-z_1)-R_3(y_2-y_1) \\ R_3(x_2-x_1)-R_1(z_2-z_1) \\ R_1(y_2-y_1)-R_2(x_2-x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\omega(z_2-z_1)\sin\theta-\omega(y_2-y_1)\cos\theta \\ \omega(x_2-x_1)\cos\theta \\ \omega(x_2-x_1)\sin\theta \end{vmatrix} \qquad \forall P_1 \ \forall P_2$$

ce qui donne :

$$\underline{R} = \begin{vmatrix} R_1 = 0 \\ R_2 = -\omega\sin\theta \\ R_3 = \omega\cos\theta \end{vmatrix}$$

d'où les coordonnées vectorielles du torseur au point de réduction A :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ -\omega\sin\theta \\ \omega\cos\theta \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \underline{H}(A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\upsilon}{\cos\theta} \end{vmatrix} \end{array} \right\}_A$$

Remarque (interprétation sans démonstration) : Le torseur τ peut être interprété comme le torseur cinématique (des vitesses) d'un solide indéformable en mouvement avec :

Un vecteur rotation ($rad.s^{-1}$) instantanée,

Un vecteur vitesse ($m.s^{-1}$) au point A

Exercice 2
Une porte blindée est articulée sur le mur au point O par l'intermédiaire de deux gonds renforcés aux points A et B. Le poids P de la porte est de 2000N (voir figure 1).

Question 1 : Ecrire les torseurs de liaison aux point A, B et G, sachant que l'action exercée en B par le mur est contenue dans le plan horizontalement passant par le point B.

Question 2 : Appliquer le principe fondamental de la statique.

Question 3 : En déduire les réactions de liaison en A et en B.

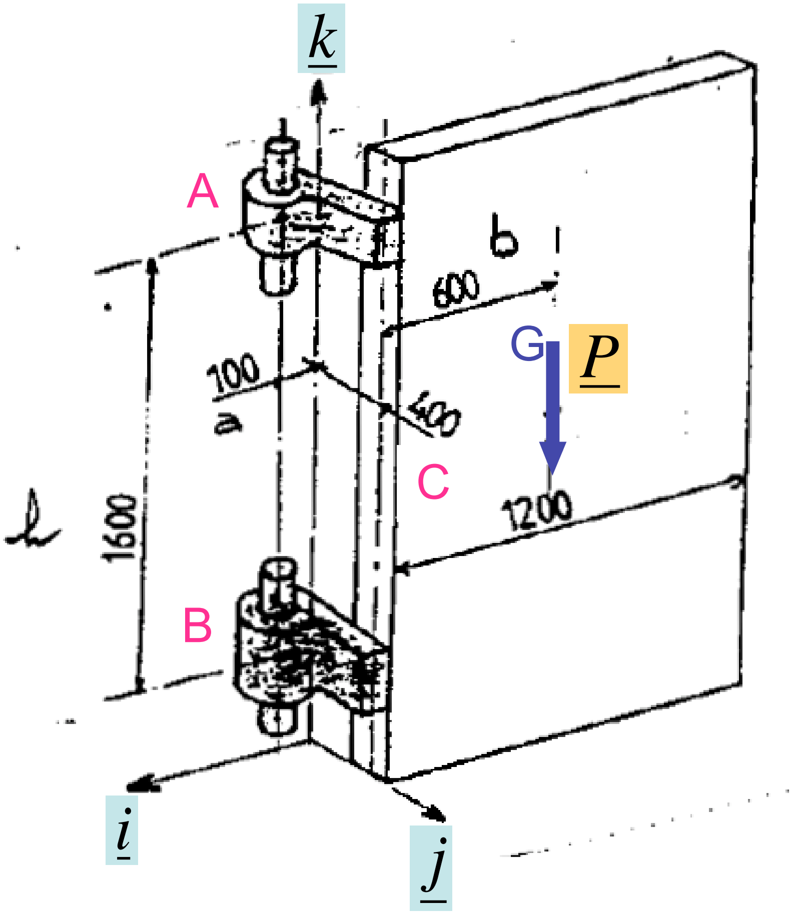


Figure 1 : schéma de la porte.

Corrigé

1. Torseur associé au poids de la porte appliqué en G : $\tau_G = {}_G\begin{Bmatrix} \underline{R}(\tau_G) = -P\underline{k} \\ \underline{M}(\tau_G, G) = \underline{0} \end{Bmatrix}$

Torseur de liaison en A (liaison rotule) : $\tau_A = {}_A\begin{Bmatrix} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \underline{0} \end{Bmatrix}$

Torseur de liaison en B (liaison linéaire annulaire) : $\tau_B = {}_B\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_B) = \left| \begin{array}{l} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{array} \right. \\ \underline{M}(\tau_B, B) = \underline{0} \end{array} \right\}$

2. Principe fondamental de la statique

On exprime d'abord tous les torseurs en un même point de réduction, soit le point A :

$$\tau_G = {}_G\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_G) = -P\underline{k} \\ \underline{M}(\tau_G, G) = \underline{0} \end{array} \right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_G) = -P\underline{k} \\ \underline{M}(\tau_G, A) = \underline{M}(\tau_G, G) + \underline{AG} \wedge \underline{R}(\tau_G) \end{array} \right\}$$

$$\tau_B = {}_B\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_B) = \left| \begin{array}{l} X_B \\ Y_B \\ \end{array} \right. \\ \underline{M}(\tau_B, B) = \underline{0} \end{array} \right\} = \tau_B = {}_A\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_B) = \left| \begin{array}{l} X_B \\ Y_B \\ \end{array} \right. \\ \underline{M}(\tau_B, A) = \underline{AB} \wedge \underline{R}(\tau_B) \end{array} \right\}$$

et

$$\tau_A = {}_A\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \left| \begin{array}{l} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{array} \right. \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \underline{0} \end{array} \right\}$$

Le principe fondamental de la statique se traduit par :

$$\left\{\tau_{\text{efforts extérieurs}}\right\} = \{0\}$$

Attention : Pour pouvoir additionner des torseurs, ils doivent tous êtres exprimés au même centre de réduction. Il sera parfois nécessaire de réaliser, au préalable, un changement de centre réduction.

Les vecteurs doivent être exprimés dans la même base.

Les unités doivent être compatibles entre elles.

La somme des torseurs associés aux efforts extérieurs conduit à :

$$\tau_A + \tau_B + \tau_G = \{0\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \underline{R}(\tau_A) + \underline{R}(\tau_B) + \underline{R}(\tau_G) = \underline{0} & (1) \\ \underline{M}(\tau_A, A) + \underline{M}(\tau_B, A) + \underline{M}(\tau_G, A) = \underline{0} & (2) \end{array} \right.$$

$$(1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_A + X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ Z_A = P \end{array} \right.$$

$$(2) \Rightarrow \underbrace{\underline{M}(\tau_A, A)}_{0} + \underbrace{\underline{M}(\tau_B, B)}_{0} + \underline{AB} \wedge \underline{R}(\tau_B) + \underbrace{\underline{M}(\tau_G, G)}_{0} + \underline{AG} \wedge \underline{R}(\tau_G) = \underline{0}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -h \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -b-a \\ c \\ -h/2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{vmatrix} \quad = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} -Pc + hY_B = 0 \\ -Pb - Pa - hX_B = 0 \end{cases}$$

soit finalement :

$$X_B = -P\frac{b+a}{h} = -875N$$
$$Y_B = \frac{Pc}{h} = 500N$$
$$X_A = -X_B = 875N$$
$$Y_A = -Y_B = -500N$$
$$Z_A = P = 2000N$$

Exercice 3

Une enseigne lumineuse d'une librairie a une liaison rotule avec le mur au point A (figure 2). Elle est soutenue au point D par deux câbles BD et CD de même longueur. Le poids P de l'enseigne est égal à 500N.

Question 1 : Ecrire les torseurs de liaison aux points A, G, D, définissant les actions sur l'enseigne.

Question 2 : Appliquer le principe fondamental de la statique.

Question 3 : En déduire la tension dans les câbles.

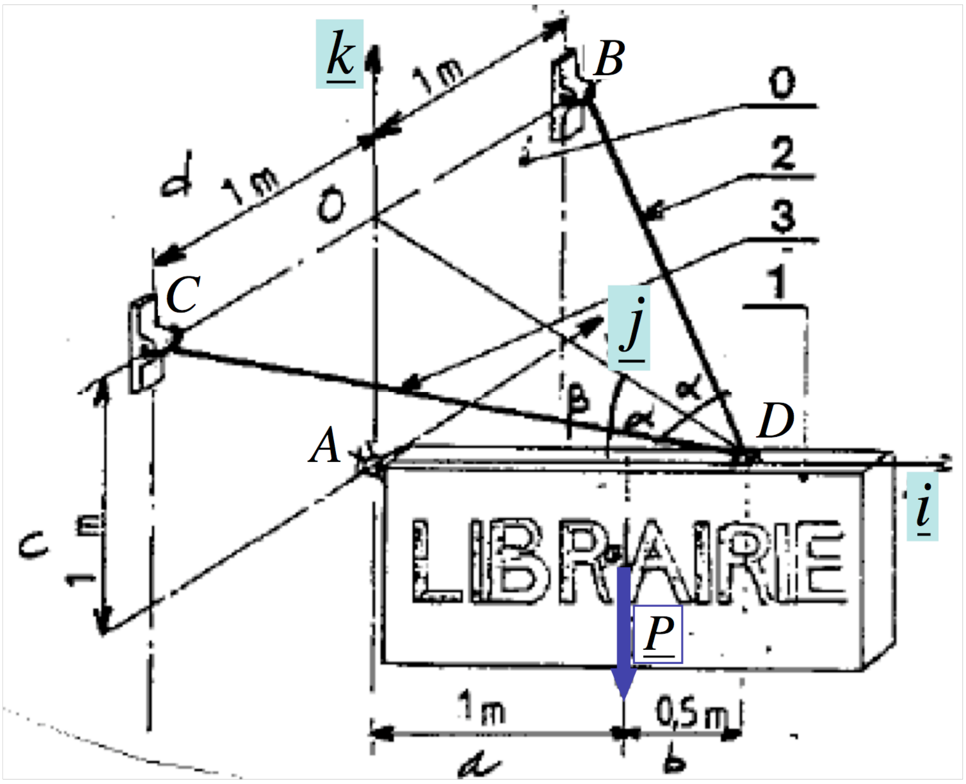


Figure 2 : Schéma de l'enseigne.

Corrigé

1. Torseur associé au poids de l'enseigne : $\tau_G = {}_G\begin{Bmatrix} \underline{R}(\tau_G) = -P\underline{k} \\ \underline{M}(\tau_G, G) = \underline{0} \end{Bmatrix}$

Torseur associé à l'action de la rotule sur l'enseigne : $\tau_A = {}_A\begin{Bmatrix} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \underline{0} \end{Bmatrix}$

Torseur associé à l'action des câbles sur l'enseigne : $\tau_D = {}_D\begin{Bmatrix} \underline{R}(\tau_D) = \begin{vmatrix} -2T\cos\alpha\cos\beta \\ 0 \\ 2T\cos\alpha\sin\beta \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_D, D) = \underline{0} \end{Bmatrix}$

où T est la tension des câbles

2. Principe fondamental de la statique

On exprime d'abord tous les torseurs en un même point de réduction, soit le point A :

$$\tau_G = {}_G\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_G) = -P\underline{k} \\ \underline{M}(\tau_G, G) = \underline{0} \end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_G) = -P\underline{k} \\ \underline{M}(\tau_G, A) = \underline{M}(\tau_G, G) + \underline{AG} \wedge \underline{R}(\tau_G) \end{matrix}\right\}$$

$$\tau_D = {}_D\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_D) = \begin{vmatrix} -2T\cos\alpha\cos\beta \\ 0 \\ 2T\cos\alpha\sin\beta \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_D, D) = \underline{0} \end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_D) = \begin{vmatrix} -2T\cos\alpha\cos\beta \\ 0 \\ 2T\cos\alpha\sin\beta \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_D, A) = \underline{M}(\tau_D, D) + \underline{AD} \wedge \underline{R}(\tau_D) \end{matrix}\right\}$$

$$\tau_A = {}_A\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \underline{0} \end{matrix}\right\}$$

Le principe fondamental de la statique s'écrit : $\{\tau_{\text{efforts extérieurs}}\} = \{0\}$

$$\text{Soit} \quad \tau_A + \tau_D + \tau_G = \{0\}$$

$$\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_A) + \underline{R}(\tau_D) + \underline{R}(\tau_G) = \underline{0} & (1) \\ \underline{M}(\tau_A, A) + \underline{M}(\tau_D, A) + \underline{M}(\tau_G, A) = \underline{0} & (2) \end{matrix}\right.$$

$$(1) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} X_A - 2T\cos\alpha\cos\beta = 0 \\ Y_A = 0 \\ Z_A + 2T\cos\alpha\sin\beta = P \end{matrix}\right.$$

(2)

$$\underbrace{\underline{M}(\tau_A, A)}_{0} + \underbrace{\underline{M}(\tau_G, G)}_{0} + \underline{AG} \wedge \underline{R}(\tau_G) + \underbrace{\underline{M}(\tau_D, D)}_{0} + \underline{AD} \wedge \underline{R}(\tau_D) = \underline{0}$$

$$\begin{vmatrix} a \\ 0 \\ -e \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a+b \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -2T\cos\alpha\cos\beta \\ 0 \\ 2T\cos\alpha\sin\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

ce qui conduit à :

$$aP - 2T(a+b)\cos\alpha\sin\beta = 0$$

d'où la tension T dans les câbles :

$$T = \frac{aP}{2(a+b)\cos\alpha\sin\beta}$$

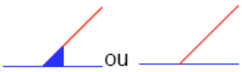
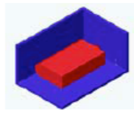
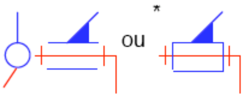
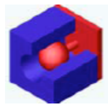
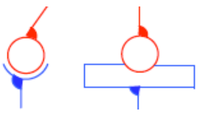
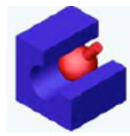
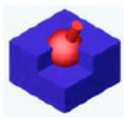
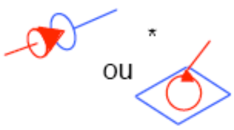
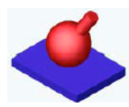
Les équations (1) permettent de déterminer X_A et Z_A :

$$X_A = \frac{a}{a+b}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}P = \frac{a}{a+b}\cot an(\beta)P$$

$$Z_A = \frac{b}{a+b}P$$

L'application numérique conduit à : $T = 344N$ sachant que cosα= 0.874 et sinβ= 0,555

Liaisons mécaniques normalisées

Nature de liaison	***Représentation plane***	***Représentation spatiale***	***Degrés de liberté***	***Torseur de liaison***	***Zone de contact***
			$\left\{\begin{matrix} \text{translations} & t_x \\ & t_y \\ & t_z \\ \text{rotations} & r_x \\ & r_y \\ & r_z \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_A) = & R_x \\ & R_y \\ & R_z \\ \underline{M}(\tau_A, A) & M_x \\ & M_y \\ & M_z \end{matrix}\right\}$	
Encastrement			$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_A) = & R_x \\ & R_y \\ & R_z \\ \underline{M}(\tau_A, A) = & M_x \\ & M_y \\ & M_z \end{matrix}\right\}$	
Pivot d'axe (A,<u>x</u>)			$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_x \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_A) = & R_x \\ & R_y \\ & R_z \\ \underline{M}(\tau_A, A) = & 0 \\ & M_y \\ & M_z \end{matrix}\right\}$	
Liaison linéaire annulaire de centre A et de direction <u>x</u>			$\left\{\begin{matrix} t_x \\ 0 \\ 0 \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_A) = & 0 \\ & R_y \\ & R_z \\ \underline{M}(\tau_A, A) = & 0 \\ & 0 \\ & 0 \end{matrix}\right\}$	
Liaison sphérique (rotule) de centre A			$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_A) = & R_x \\ & R_y \\ & R_z \\ \underline{M}(\tau_A, A) = & 0 \\ & 0 \\ & 0 \end{matrix}\right\}$	
Liaison ponctuelle			$\left\{\begin{matrix} 0 \\ t_y \\ t_z \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} \underline{R}(\tau_A) = & R_x \\ & 0 \\ & 0 \\ \underline{M}(\tau_A, A) = & 0 \\ & 0 \\ & 0 \end{matrix}\right\}$	

Remarques :

1. Un degrés de liberté égal à zéro est un degrés de liberté supprimé.

2. Un degrés de liberté de translation supprimée correspond à une inconnue en force dans le torseur de liaison.
Un degrés de liberté de rotation supprimée correspond à une inconnue en moment dans le torseur de liaison.

3. Exemple : La liaison linéaire annulaire a **quatre** degrés de liberté : **une translation** et **trois rotations**. Elle introduit donc **2** inconnues de liaison (2 forces).
Cette liaison est semblable à la liaison rotule, mais l'objet entourant la sphère mobile n'a plus la symétrie sphérique mais devient un demi-cylindre creux ce qui permet de déplacer la sphère en translation.